

# Théorème de Merle: cas des 1-formes de type courbes généralisées

Patrick Rouillé

**Resumé.** Cet article contribue à l'étude des 1-formes holomorphes de type courbes généralisées. Nous observons que deux 1-formes de type courbes généralisées ayant les mêmes séparatrices partagent certaines propriétés. Nous en déduisons que dans le cas d'une unique séparatrice, son type topologique est déterminé par ses invariants polaires. Nous commençons donc par étendre la notion d'invariant polaire aux 1-formes holomorphes de type courbes généralisées. Nous étudions ensuite le polygone de Newton d'une 1-forme holomorphe pour mesurer le contact de la séparatrice d'une 1-forme holomorphe de type courbe généralisée avec ses courbes polaires. Nous terminons la preuve par une formule à la Plücker.

**Mots Clefs:** Courbe généralisée, séparatrice, courbe polaire, invariant polaire, polygone de Newton, développement de Puiseux.

**Abstract.** In this paper, we consider singular holomorphic 1-forms in dimension two of generalized curve type ; some properties shared by such 1-forms having the same separatrices allow us to prove that in case of a unique separatrix, its topological type is given by polar invariants. For that purpose, we extend the notion of polar invariant to holomorphic 1-forms ; then we study the Newton polygon of an holomorphic 1-form in order to compute the order of contact between the separatrix of a generalized curve and its polar curves. We conclude the proof by a Plücker-like formula.

**Keywords:** Generalized curve, separatrix, polar curve, polar invariant, Newton polygon, Puiseux expansion.

## 1. Introduction

A la manière de [11] ce texte aborde un problème d'équisingularité pour les séparatrices de certaines 1-formes holomorphes, les courbes généralisées introduites par Camacho, Lins et Sad [4]. On démontre:

**Theorème 1.1.** *Soit  $\omega$  une 1-forme de type courbe généralisée. Supposons qu'elle ne possède qu'une seule séparatrice  $C$ , alors le type topolo-*

gique de  $C$  est déterminé par les invariants polaires de  $\omega$ .

Plus précisément, par séparatrice d'une 1-forme  $\omega$ , on entend une courbe irréductible  $C$  paramétrée par  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  telle que  $\gamma^*\omega \equiv 0$ . A toute courbe irréductible  $C$ , on associe sans équivoque des invariants polaires [13] en choisissant une équation réduite  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  de  $C$  définie dans un voisinage  $U$  de  $(0, 0)$  et une courbe polaire:

$$\Gamma_{[-\mu:\lambda]} = \left\{ (x, y) \in U \mid \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\}$$

En effet, le type topologique de  $\Gamma_{[-\mu:\lambda]}$  ne dépend ni du choix de  $f$  ni du choix de  $[-\mu : \lambda]$  générique dans  $\mathbb{CP}(1)$ ; en outre, si  $\Gamma_{[-\mu:\lambda]}$  admet une décomposition en composantes irréductibles:

$$\Gamma_{[-\mu:\lambda]} = \bigcup_{q=1}^l \gamma_q$$

et si  $(x_q(t), y_q(t))$  paramètre  $\gamma_q$ , alors les nombres

$$\begin{aligned} m_q(C) &= \text{mult}(\gamma_q) \\ e_q(C) + m_q(C) &= \text{ord}_t f(x_q(t), y_q(t)) \end{aligned}$$

indépendants du choix de l'équation réduite de  $C$  et d'un choix générique de  $[-\mu : \lambda]$  sont appelés invariants polaires. D'après un théorème de Merle [11], la donnée de la multiplicité d'une courbe polaire associée à une direction générique  $[-\mu : \lambda]$  et des quotients polaires, c'est-à-dire l'ensemble

$$\left\{ \frac{e_q(C)}{m_q(C)} \right\}_{q=1 \dots l} \cup \{ \text{mult}(\Gamma_{[-\mu:\lambda]}) \}$$

permet de retrouver le type topologique de  $C$ . Nous allons montrer que considérer des invariants polaires associés à une courbe généralisée dont  $C$  est l'unique séparatrice ne modifie pas l'ensemble des quotients polaires.

Prouver ce théorème fait appel à des polygones de Newton; il s'agit de représenter sur le même diagramme les exposants des paramétrisations de Puiseux de la séparatrice de  $\omega$  et des polaires. Cette méthode suggérée par [7] dans le cas des fonctions s'étend à certaines 1-formes

holomorphes, en utilisant la construction de Briot et Bouquet [1].

## 2. Invariants polaires et topologie

**Notation.** Par courbe, on entend dorénavant le représentant d'un germe en  $(0, 0)$  d'ensemble analytique de dimension 1. Par 1-forme holomorphe, on entend le représentant d'un germe en  $(0, 0)$  de 1-forme différentielle holomorphe à singularité isolée en  $(0, 0)$ . On note  $\text{mult}(C)$  la multiplicité en  $(0, 0)$  d'une courbe  $C$ ; si  $C$  et  $D$  sont deux courbes sans branche commune en  $(0, 0)$ ,  $(C, D)_0$  désigne leur multiplicité d'intersection en  $(0, 0)$ .

Nous rappelons que le théorème de Enriques-Chisini dit que deux courbes ont le même type topologique quand elles ont la même désingularisation et que le lemme de M. Noether s'énonce:

$$(C, D)_0 = \text{mult}(C)\text{mult}(D)(\widehat{C}, \widehat{D})_0,$$

où  $\widehat{C}$  et  $\widehat{D}$  sont les transformées strictes des courbes  $C$  et  $D$  par un éclatement ponctuel.

Une courbe irréductible de multiplicité  $m$  est paramétrée par:

$$x = t^m, \quad y = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i.$$

Soit  $k_1$  le plus petit entier  $k$  tel que  $a_k$  soit non nul et que  $k$  ne soit pas divisible par  $m$ ; on pose:  $k/m = p_1/n_1$  avec  $\text{pgcd}(p_1, n_1) = 1$ . Puis  $k_2$  le plus petit entier  $k$  tel que  $a_k$  soit non nul et que  $n_1 k$  ne soit pas divisible par  $m$ ; on pose:  $k_2 = p_2/n_1 n_2$  où  $\text{pgcd}(p_2, n_2) = 1$ .

Ainsi de suite on définit un ensemble fini de couples appelés paires de Puiseux de  $C$ :

$$P(C) = \{(p_1, n_1), \dots, (p_g, n_g)\}$$

Or il est connu que le type topologique de  $C$  au voisinage de  $(0, 0)$  est celui d'un cône de sommet  $(0, 0)$  sur le nœud  $K(C)$ , intersection de  $C$  et d'une sphère de centre  $(0, 0)$  de rayon assez petit.

**Théorème 2.1.** (de K. Brauner) *Le nœud  $K(C)$  est décrit par  $P(C)$ .*

D'après ce qui précède, les nombres  $\{\sigma_i\}_{i=0\dots g}$  définis par:

$$\sigma_0 = m, \quad \frac{\sigma_i}{m} = \frac{p_i}{n_1 \cdots n_i} \quad \text{si } i \neq 0$$

appelés exposants de Puiseux, apparaissent dans la paramétrisation de  $C$  et déterminent son type topologique. Il en est donc de même du cortège de nombres  $\{\bar{\sigma}_i\}_{i=0\dots g}$  définis ainsi par [14]:

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0, \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1,$$

$$\bar{\sigma}_{k+1} = n_k \bar{\sigma}_k - \sigma_k + \sigma_{k+1}.$$

Soit  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  une 1-forme holomorphe, associons lui son application de Gauss:

$$\mathcal{G}_\omega : (x, y) \mapsto [-B(x, y) : A(x, y)].$$

Comme  $(0, 0)$  est une singularité isolée de  $\omega$ ,  $\mathcal{G}_\omega$  est définie dans  $U \setminus \{(0, 0)\}$  où  $U$  est un voisinage de  $(0, 0)$ , à valeurs dans  $\mathbb{CP}(1)$ .

Une succession d'éclatements  $E : \hat{U} \longrightarrow U$  telle que  $\mathcal{G}_\omega \circ E$  soit partout définie dans  $\hat{U}$  est appelée une réduction de  $\mathcal{G}_\omega$ . L'existence d'une réduction minimale ou canonique est classique. Nous renvoyons à [9] ainsi que pour la définition [2.2]. Rappelons qu'une composante  $D$  de  $E^{-1}(0)$  est dite dicritique si  $\mathcal{G}_\omega \circ E$  restreint à  $D$  n'est pas constante.

**Définition 2.2.** ([9]) *L'ensemble des valeurs spéciales de  $\mathcal{G}_\omega$  est formé:*

- (i) *des valeurs de  $\mathcal{G}_\omega \circ E$  restreint à  $D_a$  où  $D_a$  parcourt l'ensemble des composantes non dicritiques de  $E^{-1}(0)$ .*
- (ii) *des valeurs critiques de  $\mathcal{G}_\omega \circ E$  restreint à  $D_b$  où  $D_b$  parcourt l'ensemble des composantes dicritiques de  $E$ .*
- (iii) *des valeurs de  $\mathcal{G}_\omega \circ E(Q)$  où  $Q$  est un point d'intersection entre deux dicritiques.*

*Par définition une valeur non spéciale est générique.*

**Définition 2.3.** *Les courbes polaires de  $\omega$  sont les courbes:*

$$\Gamma_{[-b:a]} = \mathcal{G}_\omega^{-1}([-b : a]) = \{(x, y) \in U \mid aA(x, y) + bB(x, y) = 0\};$$

*on dit que  $\Gamma_{[-b:a]}$  est une polaire générique quand  $[-b : a]$  est une valeur générique de  $\mathcal{G}_\omega$ .*

Il résulte du théorème de Enriques-Chisini que si  $t$  et  $t'$  sont deux valeurs génériques,  $\Gamma_t = \mathcal{G}_\omega^{-1}(t)$  et  $\Gamma_{t'} = \mathcal{G}_\omega^{-1}(t')$  ont même topologie. Si:

$$\Gamma_t = \bigcup_{q=1}^l \gamma_q$$

est une décomposition de  $\Gamma_t$  en composantes irréductibles et si:

$$m_q(\omega) = \text{mult}(\gamma_q)$$

la famille:

$$\{m_q(\omega)\}_{q=1 \dots l}$$

ne dépend pas du choix de  $t$  pris parmi les valeurs génériques.

Par ailleurs en raison du lemme de Noether:  $e_q(\omega) = (\gamma_q, \Gamma_{t'})_0$  ne dépend pas du choix de deux valeurs génériques distinctes  $t$  et  $t'$ .

**Définition 2.4.** Les nombres  $m_q(\omega)$  et  $e_q(\omega)$  sont appelés les invariants polaires de  $\omega$ .

La preuve du théorème repose sur la détermination de l'ordre de coïncidence entre la séparatrice unique d'une 1-forme de type courbe généralisée et les composantes d'une courbe polaire générique:

**Définition 2.5.** ([8]) L'ordre de coïncidence  $\mathcal{C}(C, D)$  entre deux courbes irréductibles  $C$  et  $D$  est:

$$\sup\{1, \sup\{\text{ord}_x(y_D^\nu(x) - y_C^\mu(x) \mid \nu = 1 \dots \text{mult}(D), \mu = 1 \dots \text{mult}(C))\}\}$$

où  $y_D^\nu(x)_{\nu=1 \dots \text{mult}(D)}$  et  $y_C^\mu(x)_{\mu=1 \dots \text{mult}(C)}$  sont les déterminations des paramétrisations de Puiseux des courbes  $D$  et  $C$ .

Dorénavant  $C$  est une courbe irréductible donnée par son cortège d'invariants topologiques  $\{\bar{\sigma}_0, \dots, \bar{\sigma}_g\}$ .

**Proposition 2.6.** ([11]) Soit  $D$  une courbe irréductible. Si:  $\mathcal{C}(C, D) = \sigma_i/m$  alors:

$$\frac{(C, D)_0}{\text{mult}(D)} = \frac{\bar{\sigma}_i}{n_1 \dots n_{i-1}}$$

Dans [11] il est démontré que l'ordre de coïncidence entre les branches polaires génériques d'une courbe irréductible et cette courbe sont

exactement les exposants  $\sigma_i/m$ . Or d'après les formules de Plücker:

$$\frac{e_q(C)}{m_q(C)} + 1 = \frac{(\gamma_q, C)_0}{m_q(C)}.$$

La donnée des quotients polaires:

$$\left\{ \frac{e_q(C)}{m_q(C)} \right\}_{q=1 \dots l} \cup \{mult(\Gamma_{[-\mu:\lambda]})\} \text{ avec } [-\mu:\lambda] \text{ générique}$$

est donc équivalente à celle des  $\bar{\sigma}_i$ . Nous allons montrer que si  $\delta$  décrit l'ensemble des branches  $\gamma_q$  d'une courbe polaire générique d'une 1-forme de type courbe généralisée  $\omega$  de séparatrice  $C$ ,  $\mathcal{C}(C, \delta)$  décrit l'ensemble des exposants  $\sigma_i/m$ . Puis nous montrerons l'égalité:

$$\frac{e_q(\omega)}{m_q(\omega)} + 1 = \frac{(\gamma_q, C)_0}{m_q(\omega)}.$$

Nous aurons prouvé que le type topologique de  $C$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\{\bar{\sigma}_i\}_{i=0 \dots g}$ , est déterminé par les invariants polaires de  $\omega$ .

L'exemple qui suit récapitule les étapes de l'application du théorème.

i) Déterminer:

$$\left\{ \frac{e_q(\omega)}{m_q(\omega)} + 1 \right\}_{q=1 \dots l} \cup \{mult(\Gamma_{[-\mu:\lambda]}) + 1\} = \left\{ \frac{\bar{\sigma}_i}{n_1 \dots n_{i-1}} \right\}_{i=0 \dots g},$$

ii) en déduire les exposants de Puiseux  $\sigma_i/m$ .

Considérons:

$$\omega = d(y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7) + \omega_1$$

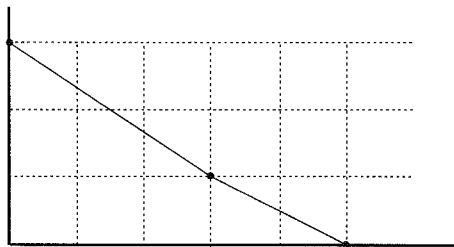
où  $\omega_1$  est une perturbation dont les coefficients sont d'ordre au moins égal à 10. On peut vérifier par une succession d'éclatements ponctuels que  $\omega$  est de type courbe généralisée et ne possède qu'une seule séparatrice  $C$ .

L'équation de la courbe polaire  $\Gamma_{[-b:a]}$  est:

$$a(6x^5 - 7x^6 - 6x^2y^2 - 20x^4y) + b(4y^3 - 4x^3y - 4x^5) + G(a, b, x, y)$$

où  $G(a, b, x, y)$  peut être négligé.

Le polygone de Newton de  $\Gamma_{[-b:a]}$  est représenté ci-dessous pour des valeurs génériques de  $[-b:a]$ .



La courbe polaire  $\Gamma_{[-b:a]}$  possède donc deux composantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . La méthode de Newton montre que  $\gamma_1$  est paramétrée par:

$$y = c(a, b)x^2 + \dots$$

et que  $\gamma_2$  est paramétrée par:

$$y = x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

où ne sont omis que des termes négligeables ne portant aucune information sur la topologie de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . On en déduit:

$$m_1(\omega) = 1, \quad e_1(\omega) = 5, \quad m_2(\omega) = 2, \quad e_2(\omega) = 11;$$

$$\left\{ \frac{e_q(\omega)}{m_q(\omega)} + 1 \right\}_{q=1 \dots l} \cup \{mult(\Gamma_{[-\mu:\lambda]}) + 1\} = \{4, 6, 13/2\}.$$

Ainsi:

- $mult(C) = \sigma_0 = \bar{\sigma}_0 = 4,$
- $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 = 6,$
- $n_1 = 2$  et  $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 - n_1\bar{\sigma}_1 + \sigma_1 = 13 - 12 + 6 = 7.$

Les exposants de Puiseux de  $C$  sont  $3/2$  et  $7/4$ .

### 3. Polygones de Newton de 1-formes

La comparaison des polygones de Newton des 1-formes de type courbe généralisée à singularité isolée et des équations réduites de leurs séparatrices fait l'objet de cette section.

**Notation.** Soit  $\omega$  une 1-forme holomorphe singulière au point  $(0, 0)$ , elle se développe en série de 1-formes  $\omega_j$  à coefficients homogènes de degré

$j$ :

$$\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j$$

on note  $\text{mult}(\omega)$  et on appelle multiplicité algébrique de  $\omega$  le degré des coefficients du premier terme non nul de cette série.

Soit  $f$  une fonction analytique nulle à l'origine et son développement en série

$$f(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

Soit  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  une 1-forme holomorphe, les séparatrices de  $\omega$  sont les solutions analytiques de l'équation différentielle:

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

dont le développement en série s'écrit:

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} \frac{dy}{dx}$$

**Définition 3.1.** ([1]) On appelle support de  $f$  (resp  $\omega$ ) et on note  $\Delta(f)$  (resp  $\Delta(\omega)$ ) la partie suivante du réseau  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  :  $\Delta(f) = \{(\alpha, \beta) \mid f_{\alpha\beta} \neq 0\}$  (resp  $\Delta(\omega) = \{(\alpha, \beta) \mid (A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}) \neq (0, 0)\}$ ).

En un point  $(\alpha, \beta) \in \Delta(\omega)$ , le monôme  $A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$  est appelé contribution de  $A$  et le monôme  $B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} dy/dx$  est appelé contribution de  $B$ . Signalons qu'en un point du support,  $A$  et  $B$  ne contribuent pas toujours tous les deux.

**Définition 3.2.** ([1]) On appelle polygone de Newton de  $f$  (resp polygone de Newton de  $\omega$ ) et on note  $N(f)$  (resp  $N(\omega)$ ) le bord de l'enveloppe convexe de

$$\bigcup_{(\alpha, \beta) \in \Delta(f)} (\alpha, \beta) + R_+ \times R_+ \quad (\text{resp} \quad \bigcup_{(\alpha, \beta) \in \Delta(\omega)} (\alpha, \beta) + R_+ \times R_+).$$

**Lemme 3.3.** ([2]) Soit  $f$  une fonction, à tout côté de  $N(f)$  de pente  $-1/\nu$  supérieure à  $-1$ , d'extrémités  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$  avec  $\beta_1 > \beta_2$ ,



correspond une union

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$$

de composantes irréductibles de  $f^{-1}(0)$  telle que  $\text{mult}(\Gamma) = \beta_1 - \beta_2$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , la composante  $\gamma_i$  est paramétrée ainsi:

$$y(x) = c_i x^\nu + \varepsilon_i(x) \quad \text{où} \quad \text{ord}_x \varepsilon_i(x) > \nu \quad \text{et} \quad c_i \neq 0$$

enfin, la correspondance réciproque est vraie.

Ce n'est pas le cas pour les 1-formes holomorphes; considérons

$$\omega = xdy - (ny - x^n)dx \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \neq 0$$

$N(\omega)$  comporte un côté  $L$  de pente  $-1/n$  alors que son unique séparatrice est la courbe d'équation  $x = 0$ . Afin de remédier à cet inconvénient, J. Cano introduit la notion de côté principal et prouve une version affaiblie du lemme précédant.

**Définition 3.4.** ([5]) Soit  $L$  un côté de  $N(\omega)$  de pente  $-1/\nu$ , d'extrémités  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$  avec  $\beta_1 > \beta_2$ , on dit que c'est un bon côté si

$$B_{\alpha_1\beta_1} \neq 0 \quad \text{et} \quad -A_{\alpha_1\beta_1}/B_{\alpha_1\beta_1} \notin \mathbb{Q} \cap \{r \geq \nu\}; A_{\alpha_2\beta_2} + \nu B_{\alpha_2\beta_2} \neq 0.$$

Si  $\{y = 0\}$  n'est pas une séparatrice de  $\omega$  et si  $L$  est le bon côté de plus grande pente, alors on dit que c'est le côté principal de  $\omega$ .

**Lemme 3.5.** ([5]) Si  $\{x = 0\}$  et  $\{y = 0\}$  ne sont pas des séparatrices de  $\omega$ , alors  $N(\omega)$  a un côté principal et un seul. Si ce dernier est de pente  $-1/\nu$ , alors  $\omega$  a une séparatrice paramétrée ainsi

$$y = cx^\nu + \eta(x) \quad \text{où} \quad c \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{ord}_x \eta(x) > \nu.$$

Si  $\nu = p_1/n_1$  avec  $\text{pgcd}(p_1, n_1) = 1$  et si  $E$  est l'application:

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{n_1}, \bar{y} + c\bar{x}^{p_1})$$

alors soit  $\bar{y} = 0$  est l'équation d'une séparatrice de  $E^*\omega$ , soit  $N(E^*\omega)$  a un côté principal de pente  $-1/\lambda$  avec  $\lambda > p_1$ .

**Définition 3.6.** ([4]) Une 1-forme  $\omega$  est dite de type courbe généralisée si pour toute réduction  $E$  de  $\omega$ ,  $E^*\omega$  ne comporte ni composante dicritique, ni point de type selle-nœud.

Une succession d'éclatements ponctuels [12] nous ramène à la situation suivante: étant donnée  $\omega$  une 1-forme singulière réduite de type courbe généralisée, [10] assure l'existence d'un système de coordonnées  $(x, y)$  tel que

$$\omega = \lambda x(1 + \cdots)dy + \mu y(1 + \cdots)dx \quad \text{avec} \quad \mu\lambda \neq 0 \text{ et } \lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^-.$$

Si  $f$  est une équation réduite de ses séparatrices,  $f(x, y) = xyU(x, y)$ , on a  $U(0, 0) \neq 0$  et pour toute courbe paramétrée par  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , on vérifie l'égalité

$$\text{ord}_t \omega(x(t), y(t)) = \text{ord}_t df(x(t), y(t)).$$

C'est un cas particulier du lemme suivant:

**Lemme 3.7.** *Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux 1-formes de type courbe généralisée à singularité isolée dont les séparatrices sont identiques. Pour toute courbe  $\gamma$  distincte des séparatrices et toute paramétrisation  $(x(t), y(t))$  de  $\gamma$ :*

$$\text{ord}_t \omega_1(x(t), y(t)) = \text{ord}_t \omega_2(x(t), y(t))$$

**Preuve du lemme.** Supposons le cône tangent de  $\gamma$  différent de  $\{x = 0\}$ , posons

$$\omega_1 = A_1 dx + B_1 dy \quad \omega_2 = A_2 dx + B_2 dy$$

et effectuons l'éclatement de l'origine dans la carte

$$E : (x, u) \mapsto (x, xu)$$

Si  $\hat{\omega}_1$  et  $\hat{\omega}_2$  désignent les transformées strictes de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , si  $m_1$  et  $m_2$  sont leurs multiplicités algébriques respectives, il vient

$$E^* \omega_1 = (A_1(x, xu) + uB_1(x, xu))dx + xB_1(x, xu)du = x^{m_1} \hat{\omega}_1,$$

$$E^* \omega_2 = (A_2(x, xu) + uB_2(x, xu))dx + xB_2(x, xu)du = x^{m_2} \hat{\omega}_2.$$

$\gamma$  et sa transformée stricte  $\hat{\gamma}$  étant paramétrées par  $\gamma(t)$  et  $\hat{\gamma}(t)$ , posons pour  $i = 1$  et  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega_i &= (E \circ \hat{\gamma})^* \omega_i \\ &= \hat{\gamma}^* (E^* \omega_i) = x(t)^{m_i} \hat{\gamma}^* \hat{\omega}_i. \end{aligned}$$

Ce que l'on traduit en terme de multiplicité par:

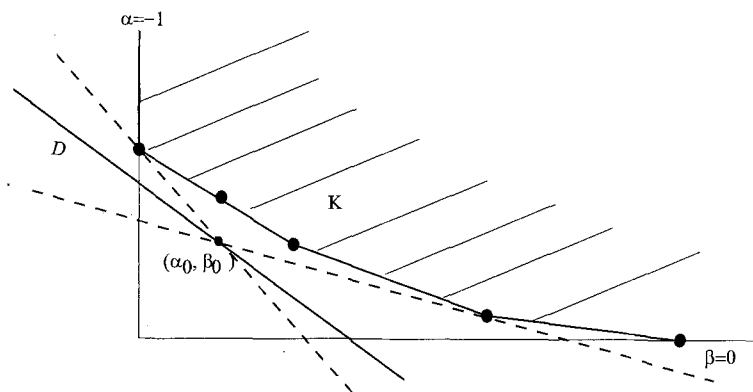
$$\begin{aligned} \text{ord}_t \omega_i(\gamma(t)) &= \text{ord}_t(x(t)^{m_i} \widehat{\omega}_i(\hat{\gamma}(t))) \\ &= \text{mult}(\gamma) \text{mult}(\omega_i) + \text{ord}_t \widehat{\omega}_i(\hat{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

D'après [4], pour toute équation réduite  $f$  des séparatrices de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $\text{mult}(df)$  sont égaux. On conclut par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaires pour désingulariser  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .  $\square$

**Proposition 3.8.** *Si  $\omega$  est une 1-forme de type courbe généralisée à singularité isolée et  $f = 0$  une équation réduite de ses séparatrices, alors  $\omega$  et  $df$  ont le même polygone de Newton.<sup>1</sup>*

**Preuve.**  $N(df)$  est le bord d'un convexe fermé de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , on le note  $K$  et on affirme que  $\Delta(\omega) \subset K$ . Si cette affirmation est fausse, on prend un point  $(\alpha_0, \beta_0)$  du support de  $\omega$  n'appartenant pas à  $K$  auquel correspond le monôme

$$A_{\alpha_0 \beta_0} x^{\alpha_0} y^{\beta_0} + B_{\alpha_0 \beta_0} x^{\alpha_0+1} y^{\beta_0-1} \frac{dy}{dx}$$



$K$  étant convexe, il passe par  $(\alpha_0, \beta_0)$  deux droites d'appui de  $K$  distinctes, de pentes  $-1/\lambda_-$  et  $-1/\lambda_+$  avec  $\lambda_+ > \lambda_-$ . En résulte que pour tout élément  $\lambda$  de  $]\lambda_-, \lambda_+[$ ,  $K$  n'intersecte aucune droite passant par  $(\alpha_0, \beta_0)$  de pente  $-1/\lambda$ , et que l'ensemble des points appartenant à  $\Delta(\omega)$  situés sur de telles droites est fini: il n'y a aucune difficulté à trouver un nombre rationnel  $p/q$  compris entre  $\lambda_-$  et  $\lambda_+$  avec  $p$  et  $q$

<sup>1</sup>JF. Mattei m'a informé que ce résultat était connu de H. Dulac [6].

premiers entre-eux tel que, si  $\mathcal{D}$  est la droite de pente  $-q/p$  passant par  $(\alpha_0, \beta_0)$ , on ait:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \cap \Delta(\omega) &= \{(\alpha_0, \beta_0)\}, \\ K &\subset \{(\alpha, \beta) \mid q\alpha + p\beta > c\} \quad \text{où} \quad c = q\alpha_0 + p\beta_0, \\ qA_{\alpha_0\beta_0} + pB_{\alpha_0\beta_0} &\neq 0.\end{aligned}$$

Si  $\gamma$  est la courbe paramétrée par  $(t^q, t^p)$ , l'égalité suivante

$$\gamma^*(A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta dx + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}dy) = (qA_{\alpha\beta} + pB_{\alpha\beta})t^{q\alpha+p\beta+q-1}dt$$

implique:  $\text{mult}(\gamma^*\omega) \leq c + q - 1$  alors que pour tout élément  $(\alpha, \beta)$  de  $\Delta(df)$

$$q\alpha + p\beta + q - 1 > c + q - 1$$

Contrairement au lemme précédant, on aurait:

$$\text{ord}_t\omega(t^q, t^p) < \text{ord}_tdf(t^q, t^p). \quad \square$$

**Lemme 3.9.** *Soit  $\omega$  une 1-forme de type courbe généralisée. Si la droite d'équation  $x=0$  n'appartient pas au cône tangent de  $\omega$  et si  $F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^m, \bar{y})$  avec  $m \in \mathbb{N}$  alors  $F^*\omega$  est de type courbe généralisée.*

**Preuve.** Le nombre de Milnor  $\mu(\omega)$  d'une 1-forme  $\omega$  à singularité isolée en  $(0,0)$  est la multiplicité d'intersection  $I_0(A, B)$  des germes en  $(0,0)$  de ses coefficients  $A$  et  $B$ ; soit  $\omega$  une telle 1-forme et  $f$  une équation réduite de ses séparatrices, celles-ci étant supposées en nombre fini, les nombres de Milnor de  $df$  et  $\omega$  sont égaux si et seulement si  $\omega$  est de type courbe généralisée [4]; vérifions le pour  $\mu(F^*df)$  et  $\mu(F^*\omega)$ , sachant que  $\mu(df) = \mu(\omega)$ .

$$\begin{aligned}\mu(F^*df) &= I_0\left(m\bar{x}^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x}(F(\bar{x}, \bar{y})), \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y}))\right) \\ &= (m-1)I_0\left(\bar{x}, \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y}))\right) + I_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}(F(\bar{x}, \bar{y})), \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y}))\right)\end{aligned}$$

$F$  étant de degré  $m$ ,

$$I_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}(F(\bar{x}, \bar{y})), \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y}))\right) = mI_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = m\mu(df)$$

Comme  $[0 : 1]$  n'est pas dans le cône tangent de  $df$ ,  $\text{ord}_y \partial f / \partial y(0, y) = \text{mult}(df)$  et

$$I_0 \left( \bar{x}, \frac{\partial f}{\partial y}(F(\bar{x}, \bar{y})) \right) = \text{ord}_{\bar{y}} \frac{\partial f}{\partial y}(F(0, \bar{y})) = \text{ord}_y \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \text{mult}(df)$$

Par suite

$$\mu(F^* df) = (m - 1)\text{mult}(df) + m\mu(df).$$

De la même manière, on calcule pour  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ :

$$\begin{aligned} \mu(F^* \omega) &= I_0(m\bar{x}^{m-1} A \circ F(\bar{x}, \bar{y}), B \circ F(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= (m - 1)I_0(\bar{x}, B \circ F(\bar{x}, \bar{y})) + I_0(A \circ F(\bar{x}, \bar{y}), B \circ F(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= (m - 1)\text{mult}(\omega) + m\mu(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

#### 4. Théorème de Merle sur la détermination du type topologique d'une séparatrice unique de 1-forme de type courbe généralisée

Dans ce qui suit, nous appliquons le programme annoncé dans le deuxième paragraphe. Soit  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  une 1-forme holomorphe, n'ayant qu'une seule séparatrice  $C$ . Nous allons montrer que les ordres de coïncidence des branches polaires génériques de  $\omega$  avec  $C$  sont les exposants de Puiseux de  $C$ . Nous allons en déduire que les invariants polaires  $m_q(\omega)$  et  $e_q(\omega)$  de  $\omega$  déterminent le type topologique de  $C$ .

On note  $m$  la multiplicité de  $C$ , elle se décompose en  $m = n_1 \cdots n_g$  et les exposants caractéristiques de la série de Puiseux de  $C$  s'écrivent:

$$\frac{\sigma_i}{m} = \frac{p_i}{n_1 \cdots n_i} \quad \text{avec } \text{pgcd}(p_i, n_i) = 1 \quad i = 1 \cdots g$$

**Proposition 4.1.** *Il existe un ensemble fini  $T$  de  $\mathbb{CP}(1)$  tel que pour tout  $[-b : a] \in \mathbb{CP}(1) \setminus T$  la courbe*

$$\Gamma_{[-b:a]} = \{(x, y) \mid aA(x, y) + bB(x, y) = 0\}$$

*se décompose en  $\Gamma_{[-b:a]} = \cup_{i=1}^g \Gamma_i$  où pour tout  $i$  toute composante  $\gamma$  de  $\Gamma_i$  satisfait*

$$\mathcal{C}(C, \gamma) = \frac{\sigma_i}{m}$$

et  $m(\Gamma_i) = n_1 \cdots n_{i-1}(n_i - 1)$ .

Fixons d'abord quelques notations. On suppose que l'unique séparatrice  $C$  de  $\omega$  paramétrée par la série de Puiseux:

$$y_C(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\frac{j+m}{m}}$$

dont on fixe un exposant caractéristique  $\sigma_i/m$ . Par définition,  $\sigma_i$  est le premier exposant de la série  $y_C(t^m)$  dont le numérateur n'est pas un multiple du produit  $n_1 \cdots n_{i-1}$ . Fixons une détermination de la fonction multiforme:

$$y_i(x) = \sum_{j=0}^{\sigma_i-m-1} a_j x^{\frac{j+m}{m}}$$

la fonction  $\bar{y}_i(\bar{x}) = y_i(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1}})$  est définie ainsi que l'application:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1}}, \bar{y} + \bar{y}_i(\bar{x})).$$

Nous noterons:

$$\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) = A \circ F(\bar{x}, \bar{y}) \text{ et } \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) = B \circ F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Les fonctions  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont définies par:

$$\bar{\omega} = F^* \omega = \tilde{A}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} + \tilde{B}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}.$$

Nous avons les formules de passages suivantes:

**Lemme 4.2. (formules de passage)**

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\bar{x}, \bar{y}) &= n_1 \cdots n_{i-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1}-1} \bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}}, \\ \tilde{B}(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} F^* \omega &= A \circ F(\bar{x}, \bar{y}) d(\bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1}}) + B \circ F(\bar{x}, \bar{y}) d(\bar{y} + \bar{y}_i(\bar{x})) \\ &= n_1 \cdots n_{i-1} \bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1}-1} d\bar{x} + \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}} d\bar{x} + \bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \\ &= \tilde{A}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} + \tilde{B}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}. \end{aligned}$$

Le résultat est immédiat par identification. □

Nous pouvons commencer la preuve de la proposition. Comme  $\{x = 0\}$  n'est pas dans la cône tangent de  $\omega$ , la 1-forme  $\bar{\omega} = F^*\omega$  est de type courbe généralisée d'après le lemme 3.9.

**Lemme 4.3.** *Le côté de plus grande pente du polygone de Newton de  $\bar{\omega}$  est de pente  $-n_i/p_i$  et c'est son côté principal.*

Les courbes  $\{x = 0\}$  et  $\{y = 0\}$  ne sont pas des séparatrices de  $\omega$ , son polygone de Newton possède un côté principal. De plus, d'après la proposition 3.8,  $N(\omega)$  est un translaté du polygone de Newton d'une équation irréductible  $f$  de  $C$ :  $N(\omega)$  se réduit à un seul côté.

Si  $i_1 = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$ , alors le côté unique de  $N(\omega)$  est principal et de pente  $-m/(i_1 + m)$ . Ou bien  $\sigma_i/m = (i_1 + m)/m$  ou bien nous effectuons la transformation

$$E_1(x_1, y_1) = (x_1^{q_1}, y_1 + a_{i_1}x_1^{r_1})$$

où

$$\frac{r_1}{q_1} = \frac{i_1 + m}{m} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(r_1, q_1) = 1.$$

Premièrement,  $\omega_1 = E_1^*\omega$  est une 1-forme de type courbe généralisée, et si  $f_1$  est une équation réduite de ses séparatrices,  $\omega_1$  et  $f_1$  ont le même polygone de Newton à une translation près. Toute composante de  $\{f_1 = 0\}$  est une branche de  $E_1^{-1}(C)$  et possède une paramétrisation:

$$y_1(x_1) = y_C(x_1^{q_1}) - a_{i_1}x_1^{r_1}.$$

et  $\sigma_i/m \neq (i_1 + m)/m$  entraîne  $y_1(x_1) \not\equiv 0$  pour toute détermination de  $y_C(x)$ .

Quand la détermination du terme d'ordre  $(i_1 + m)/m$  de  $y_C(x)$  coïncide avec le choix de  $a_{i_1}$ ,

$$y_1(x_1) = \sum_{i=i_2}^{\infty} a_i x_1^{\frac{i+m}{m} q_1} \quad \text{où} \quad i_2 = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid i > i_1; a_i \neq 0\}$$

sinon  $\text{ord}_{x_1} y_1(x_1) = r_1$  et en raison du lemme 2.3 le polygone de Newton de  $f_1$  possède deux côtés, l'un de pente

$$-\frac{q_2}{r_2} = -\frac{m}{q_1(i_2 + m)} \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(r_2, q_2) = 1$$

l'autre, de pente  $-1/r_1$ .

Deuxièmement,  $\{y_1 = 0\}$  n'étant pas séparatrice de  $\omega_1$ ,  $N(\omega_1)$  a un côté principal de pente strictement supérieure à  $-1/r_1$ , c'est donc le côté de pente  $-q_2/r_2$ .

A chaque étape, nous considérons une 1-forme  $\omega_{p-1}$  dont le côté principal du polygone de Newton est aussi le côté de plus grande pente, celle-ci étant  $-q_p/r_p$  avec

$$\frac{r_p}{q_1 \cdots q_p} = \frac{i_p + m}{m}$$

$$i_p = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid i > i_{p-1}, a_i \neq 0\}$$

Ou bien  $(i_p + m)/m = \sigma_i/m$ , ou bien nous définissons

$$E_p(x_p, y_p) = (x_p^{q_p}, y_p + a_{i_p} x_p^{r_p})$$

$$i_{p+1} = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid i_{p+1} > i_p, a_{i_p} \neq 0\}$$

dans ce cas la 1-forme  $\omega_p = E_p^* \omega_{p-1}$  est de type courbe généralisée.

En premier lieu, son polygone de Newton coïncide, à une translation près avec le polygone de Newton d'une équation réduite  $f_p$  de ses séparatrices. Celles-ci sont les composantes de  $(E_1 \circ E_2 \circ \cdots \circ E_p)^{-1}(C)$  et sont paramétrées par

$$y_p(x_p) = y_C(x_p^{q_1 \cdots q_p}) - a_{i_1} x_p^{r_1 q_2 \cdots q_p} - \cdots - a_{i_{p-1}} x_p^{r_{p-1} q_p} - a_{i_p} x_p^{r_p}$$

Quand la détermination des termes d'ordre strictement inférieur à  $(i_p + m)/m$  de la série  $y_C(x)$  coïncide avec le choix des coefficients  $a_{i_1}, \dots, a_{i_p}$

$$\text{ord}_{x_p} y_p(x_p) = \frac{i_{p+1} + m}{m} q_1 \cdots q_p$$

Sinon

$$\text{ord}_{x_p} y_p(x_p) \leq \frac{i_p + m}{m} q_1 \cdots q_p = r_p$$

Le côté de plus grande pente du polygone de Newton de  $\omega_p$  est de pente

$$-\frac{m}{q_1 \cdots q_p(i_{p+1} + m)}$$

En second lieu,  $y_p = 0$  n'est pas l'équation d'une séparatrice de  $\omega_p$ , son polygone de Newton comporte un côté principal de pente strictement supérieure à  $-1/r_p$ , et c'est le côté de plus grande pente.

Enfin ce processus s'arrête forcément car les exposants  $r_p/q_1 \cdots q_p$  sont ceux de la série  $y_C(x)$ , à ce stade  $r_p/q_1 \cdots q_p = \sigma_i/m$ .  $\square$



Les extrémités du côté principal de  $N(\bar{\omega})$  appartiennent à  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , celui-ci étant de pente  $-n_i/p_i$ , tout point  $(\alpha, \beta)$  à coordonnées entières de ce côté satisfait soit  $\beta = 0$  soit  $\beta \geq n_i$ . Parmi les sommets du côté principal qui comptent une contribution de  $\tilde{B}$ , on note  $(\alpha_1, \beta_1)$  celui dont l'ordonnée est minimum ; dans ce cas  $\beta_1 \geq n_i$ .

**Lemme 4.4.** *les côtés du polygone de Newton de  $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$  reliant les sommets d'ordonnées inférieures à  $\beta_1 - 1$  sont de pente non nulle et strictement supérieure à  $-n_i/p_i$ , pourvu que  $[a : b]$  évite un nombre fini de valeurs.*

**Preuve.** La droite portant le côté de pente  $-n_i/p_i$  de  $N(\bar{\omega})$  est d'équation:

$$\alpha + \frac{p_i}{n_i}\beta = c \quad \text{avec} \quad c = \text{ord}_{\tilde{x}} \tilde{A}(\tilde{x}, 0).$$

Comme  $(\alpha_1, \beta_1)$  est un sommet de  $N(\bar{\omega})$  comportant une contribution de  $\tilde{B}$ ,  $(\alpha_1 + 1, \beta_1 - 1)$  appartient au support de  $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$ . La droite passant par  $(\alpha_1 + 1, \beta_1 - 1)$  et de pente  $-n_i/p_i$  est d'équation:

$$\alpha + \frac{p_i}{n_i}\beta = c + 1 - \frac{p_i}{n_i}.$$

Par convexité du polygone de Newton de  $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$ , nous aurons démontré le lemme si nous prouvons que le support de  $a\bar{A} + b\bar{B}$  est dans l'intérieur du demi-plan supérieur  $H$  délimité par cette droite.

$$H = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \frac{p_i}{n_i}\beta \geq c + 1 - \frac{p_i}{n_i}\} ; \text{int}H = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \frac{p_i}{n_i}\beta > c + 1 - \frac{p_i}{n_i}\}$$

La droite de pente  $-n_i/p_i$  passant par le point  $(\alpha_1, \beta_1)$  est une droite d'appui de l'enveloppe convexe de  $\Delta(\bar{\omega})$ , en conséquence de quoi

$$\alpha + \frac{p_i}{n_i}\beta \geq c$$

pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta(\bar{\omega})$ . Si  $(\alpha, \beta)$  appartient  $\Delta(\bar{B})$ ,  $(\alpha, \beta)$  appartient à  $\Delta(\bar{B})$  et  $(\alpha - 1, \beta + 1)$  à  $\Delta(\bar{\omega})$ , d'après l'inégalité

$$(\alpha - 1) + \frac{p_i}{n_i}(\beta + 1) \geq c$$

soit  $\beta \geq \beta_1$  soit l'inégalité est stricte et le point  $(\alpha, \beta)$  est dans  $\text{int}H$  ;  
or

$$\text{ord}_{\tilde{x}} \frac{d\tilde{y}_i(\tilde{x})}{d\tilde{x}} > n_1 \cdots n_{i-1}$$

en résulte

$$\Delta\left(\frac{\tilde{B}}{n_1 \cdots n_{i-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1} - 1}} \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}}\right) \subset \text{int}H$$

en raison des formules de passage:

$$\Delta(\bar{A}) \subset \Delta\left(\frac{\tilde{B}}{n_1 \cdots n_{i-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1} - 1}} \frac{d\bar{y}_i(\bar{x})}{d\bar{x}}\right) \cup \Delta\left(\frac{\tilde{A}}{n_1 \cdots n_{i-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1} - 1}}\right)$$

et tout point  $(\alpha, \beta)$  de  $\Delta(\bar{A})$  appartient à  $\text{int}H$ , ou à

$$\Delta\left(\frac{\tilde{A}}{n_1 \cdots n_{i-1} \bar{x}^{n_1 \cdots n_{i-1} - 1}}\right)$$

dans ce cas  $(\alpha + n_1 \cdots n_{i-1} - 1, \beta)$  appartient à  $\Delta(\bar{\omega})$ ,

$$\alpha + n_1 \cdots n_{i-1} - 1 + \frac{p_i}{n_i} \beta \geq c$$

et comme  $p_i/n_i > n_1 \cdots n_{i-1}$ ,

$$\alpha + \frac{p_i}{n_i} \beta \geq c - n_1 \cdots n_{i-1} + 1 > c - \frac{p_i}{n_i} + 1$$

et  $(\alpha, \beta)$  appartient à  $\text{int}H$ . □

**Preuve de la proposition 4.1.** D'après le lemme 4.4, pour tout  $[a : b]$  sauf un nombre fini, le polygone  $N(a\bar{A} + b\bar{B})$  comporte une succession de côtés compris entre  $(\alpha_1 + 1, \beta_1 - 1)$  et un point  $(d, 0)$ , de pentes non nulles  $-1/\nu_1, \dots, -1/\nu_l$  supérieures à  $-n_i/p_i$  ; il correspond à ces côtés des composantes  $\bar{\gamma}_{jk}$  de la courbe d'équation  $a\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) + b\bar{B}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  ainsi paramétrées:

$$\bar{y}(\bar{x}) = h_{jk} \bar{x}^{\nu_j} + \varepsilon_{jk}(\bar{x})$$

$$\text{avec } h_{jk} \neq 0, \text{ ord}_{\bar{x}} \varepsilon_{jk}(\bar{x}) > \nu_j \quad j = 1 \cdots l ; k = 1 \cdots k_j$$

Nous savons que le côté de plus grande pente du polygone de Newton de l'équation réduite des séparatrices de  $\bar{\omega}$  est de pente  $-n_i/p_i$ . Toute séparatrice  $\bar{C}$  de  $\bar{\omega}$  est paramétrée par  $\bar{y}_{\bar{C}}(\bar{x})$  où

$$\text{ord}_{\bar{x}} \bar{y}_{\bar{C}}(\bar{x}) \leq \frac{p_i}{n_i}$$

il s'ensuit que pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, k_j\}$

$$\mathcal{C}(\bar{C}, \bar{\gamma}_{jk}) = \frac{p_i}{n_i}.$$

Rappelons que la différence des ordonnées des extrémités d'un côté du polygone  $N(a\bar{A} + b\bar{B})$  fournit la multiplicité de l'union des branches correspondantes et posons

$$\bar{\Gamma}_i = \bigcup_{j=1}^l \bigcup_{k=1}^{k_j} \bar{\gamma}_{jk},$$

alors  $\text{mult}(\bar{\Gamma}_i) = \beta_1 - 1$ . Revenons aux coordonnées  $(x, y)$  en posant

$$\gamma_{jk} = F(\bar{\gamma}_{jk}) \quad \text{et} \quad \Gamma_i = F(\bar{\Gamma}_i);$$

nous avons montré

$$\mathcal{C}(C, \gamma_{jk}) = \frac{p_i}{n_1 \cdots n_i} = \frac{\sigma_i}{m}$$

et  $\text{mult}(\Gamma_i) = n_1 \cdots n_{i-1} \text{mult}(\bar{\Gamma}_i) = n_1 \cdots n_{i-1}(\beta_1 - 1)$ . Vu que  $\beta_1 - 1 \geq n_i - 1$ ,  $\text{mult}(\Gamma_i) \geq n_1 \cdots n_{i-1}(n_i - 1)$ .

Ceci est vrai pour tous les exposants caractéristiques  $\sigma_i/m$ . Pourvu que  $[a : b]$  évite un nombre fini de valeurs,

$$\text{mult}(aA(x, y) + bB(x, y)) = \sum_{i=1}^g \text{mult}(\Gamma_i)$$

et

$$\text{mult}(aA(x, y) + bB(x, y)) = m - 1 = n_1 \cdots n_g - 1 = \sum_{i=1}^g n_1 \cdots n_{i-1}(n_i - 1)$$

entraîne pour tout  $i \in \{1 \cdots g\}$  l'égalité:

$$\text{mult}(\Gamma_i) = n_1 \cdots n_{i-1}(n_i - 1). \quad \square$$

Ainsi la coïncidence avec  $C$  des branches de la décomposition irréductible d'une polaire  $\Gamma_{[-b:a]}$  d'une 1-forme  $\omega$  pour une direction  $[-b : a]$  générique est indépendante du choix de  $\omega$  parmi les courbes généralisées possédant  $C$  pour unique séparatrice, le théorème en découle:

**Preuve du théorème.** Fixons une branche  $\gamma_q$  d'une polaire  $\Gamma_{[-b:a]}$  paramétrée, par  $(x_q(t), y_q(t))$ . Par définition:

$$aA(x_q(t), y_q(t)) + bB(x_q(t), y_q(t)) = 0$$

et pour tout élément  $[a' : b']$  de  $\mathbb{CP}(1)$  sauf un nombre fini

$$\text{ord}_t(a'A(x_q(t), y_q(t)) + b'B(x_q(t), y_q(t))) = e_q(\omega)$$

quitte à supposer  $ab \neq 0$ ,

$$\text{ord}_t A(x_q(t), y_q(t)) = \text{ord}_t B(x_q(t), y_q(t)) = e_q(\omega).$$

La proposition 3.1 nous autorise à poser  $\text{ord}_t x_q(t) = m_q(\omega)$ , et le lemme 2.7 à poser

$$\begin{aligned} \text{ord}_t \omega(x_q(t), y_q(t)) &= \text{ord}_t df(x_q(t), y_q(t)) \\ &= \text{ord}_t f(x_q(t), y_q(t)) - 1. \end{aligned}$$

En résulte

$$e_q(\omega) + m_q(\omega) = (C, \gamma_q)_0.$$

Les quotients polaires associés à  $\omega$  sont égaux aux quotients

$$\frac{(C, \gamma_q)_0 - \text{mult}(\gamma_q)}{\text{mult}(\gamma_q)}$$

et ceux-ci ne dépendent que de la coïncidence de  $\gamma_q$  avec  $C$ .  $\square$

Nous avons montré que la donnée des quotients polaires d'une 1-forme de type courbe généralisée  $\omega$  n'ayant qu'une seule séparatrice  $C$  équivaut à la donnée des ordres de coïncidence de  $C$  avec une polaire générique. Ces ordres de coïncidence sont les exposants de Puiseux de  $C$ , ainsi:

**Corollaire 4.5.** *Les quotients polaires d'une 1-forme  $\omega$  de type courbe généralisée n'ayant qu'une seule séparatrice sont des invariants topologiques de  $\omega$ .*

Les invariants polaires de  $\omega$  permettent de retrouver le type topologique de sa séparatrice. Qu'en est-il de la réciproque ?

D'après [4], si  $f(x, y) = 0$  est une équation réduite de la séparatrice unique  $C$  de  $\omega = Adx + Bdy$  alors  $df$  et  $\omega$  ont même multiplicité algébrique:

$$m = \sum_{q=1}^l m_q(\omega).$$

Le nombre  $m$  n'est autre que  $\text{mult}(C) - 1$ . Enfin, il est montré dans [4] que  $\omega$  et  $df$  ont le même nombre de Milnor:

$$\mu = \sum_{q=1}^l e_q(\omega).$$

Ce nombre est aussi le nombre de Milnor de  $f$ , calculable à partir des nombres  $\bar{\sigma}_i$  et  $n_i$  associés à  $C$  [14]:

$$\mu + m - 1 = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \bar{\sigma}_i.$$

Ainsi les sommes d'invariants polaires:

$$\sum_{q=1}^l m_q(\omega) \text{ et } \sum_{q=1}^l e_q(\omega)$$

sont des invariants topologiques de  $\omega$ . Cependant, il est connu que les invariants polaires ne sont pas des invariants topologiques même pour les fonctions. On considère pour cela le contre-exemple dû à B.Segre:

$$f(x, y) = y^9 + x^{52}.$$

Nous renvoyons à [3] et [8] pour plus de détails.

## Références

- [1] C. Briot & J. C. Bouquet, *Recherche sur les fonctions définies par des équations différentielles*, J.école polytech. **21**: (1986), 134-198.
- [2] E. Brieskorn & H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhauser (1980).
- [3] E. Casas, *On the singularities of polar curves*, Manuscripta math. **43**: (1983), 167-190.
- [4] C. Camacho, A. Lins Neto & P. Sad, *Topological invariants and equidesingularisation for holomorphic vector fields*, J. differential geometry. **20**: (1984), 143-174.
- [5] J. Cano, *An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solution of pfaffian forms*, Ann. Inst. Fourier. **43**(1): (1993), 125-142.
- [6] H. Dulac, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, thèse.
- [7] TC. Kuo & YC. Lu, *On analytic function germs of two complex variables*, Topology. **16**: (1977), 299-310.
- [8] D. T. Le, F. Michel & C. Weber, *Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes*, Compositio Math. **72**: (1989), 87-113.
- [9] D. T. Le & C. Weber, *Equisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et  $C^0$  suffisance*, L'enseignement mathématique, **43**: (1997), 355-380.

- [10] JF. Mattei & R. Moussu, *Holonomie et intégrale première*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. **13**: (1980), 571-621.
- [11] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Invent.math, **41**: (1977), 103-111.
- [12] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differentiable equation  $Ady = Bdx$* , Amer. J. of math. (1968), p.248-269.
- [13] B. Teissier, *Variétés polaires 1*, Invent. Math. **40**: (1977), 267-292.
- [14] O. Zariski, *Le problème des modules pour les branches planes*, Publications du centre de mathématiques de l'école polytechnique (1973).

**Patrick Rouillé**

Université de Bourgogne  
Laboratoire de topologie  
UMR 5584, 9 avenue Alain Savary  
BP 47870. 21078. Dijon Cedex  
FRANCE

E-mail: Patrick.Rouille@wanadoo.fr